**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**
**2ª Lista de Cálculo Numérico**

**1ª)** Dado o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -3 \end{cases}$$

verifique que o critério das linhas não é satisfeito. No entanto, o método de Jacobi (e também o de Gauss-Seidel) é convergente. Para demonstrar esta afirmação proceda como segue.
i) Faça o gráfico de cada uma das retas representadas nas equações acima e verifique que o ponto de interseção entre elas, (3/2, 3/2), é a solução do sistema linear.

ii) Isole $x_1$ na primeira equação e $x_2$ na segunda equação e escreva o método de Jacobi.

iii) Considere $x^{(0)} = (0, 0)$. Mostre que $x^{(2k)} = ([x_1]^{(2k)}, [x_2]^{(2k)})$ é tal que $[x_2]^{(2k)} = [x_1]^{(2k)}$, ou seja os pontos da seqüência que possuem índices pares estão sobre a reta y = x.
iv) Sabendo que $x^{(1)} = (3, 1)$, mostre que os pontos de índices ímpares estão sobre a reta $y = 2 - (1/3)x$.

Sugestão: Seja $c = [x_1]^{(2k-4)} = [x_2]^{(2k-4)}$, mostre que o coeficiente angular da reta é dado por

$-1/3 = \{[x_2]^{(2k-1)} - [x_2]^{(2k-3)}\}/\{ [x_1]^{(2k-1)} - [x_1]^{(2k-3)}\}$.

Para isto, basta notar que

$[x_1]^{(2k-1)} = 3 - [x_2]^{(2k-2)} = 2 - (1/3)[x_1]^{(2k-3)}$ e, portanto, $[x_1]^{(2k-1)} - [x_1]^{(2k-3)} = 2 - (4/3)[x_1]^{(2k-3)}$.

Contas análogas são feitas para $[x_2]^{(2k-1)}$.

v) Faça iterações até que se obtenha erro relativo menor do que $0.5\times10^{-1}$.

vi) Coloque os pontos sobre as respectivas retas e perceba a convergência para (3/2, 3/2).

**2ª)** Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $x^t = (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3)$ e $b^t = (9 \;\; 1 \;\; 3)$. Troque a 1ª com a 3ª linha; depois troque a 1ª com a terceira coluna.
i) Verifique o critério das linhas.
ii) Verifique o critério de Sassenfeld.
iii) Monte o esquema que certamente convergirá e faça uma iteração partindo de $(x_1 \;\; x_2 \;\; x_3) = (8.8 \;\; -2.7 \;\; -1.8)$.
iv) Calcule o erro relativo.

**3ª)** "Se o Critério das Linhas é satisfeito, então o Critério de Sassenfeld também é satisfeito". Verifique este fato, considerando uma matriz, $A$, $2\times2$. Lembre-se de que

$$L_i = \frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}|a_{ij}|,\ 1\leq i\leq n$$

$$\beta_i = \frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|\beta_j + \frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|,\ 2\leq i\leq n, \text{ e } \beta_1 = L_1.$$

**4ª)** Dado o sistema linear $Ax = b$, com

$$A = \begin{pmatrix} -1.0 & 0.5 & -0.1 & 0.1 \\ 0.2 & -0.6 & -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & -1.5 & 0.2 \\ -0.1 & -0.3 & -0.2 & -1.0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0.2 \\ -2.6 \\ 1.0 \\ -2.5 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

i) Verifique se o critério de Sassenfeld é satisfeito.
ii) Faça duas iterações com o método de Jacobi partindo de $x^{(0)} = (0,0,0,0)^T$.
iii) Utilize $x^{(2)}$, calculado no item anterior, como valor inicial e faça uma iteração com o método de Gauss-Seidel. Calcule o erro relativo.

**5ª)** Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $n$, onde $a_{ii} = -2$; $a_{i,i-1} = 1$; $a_{i,i+1} = 1$ e os demais elementos são nulos. Por exemplo, para $n = 4$,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ que é uma matriz tridiagonal.}$$

i) Mostre que o critério de Sassenfeld é satisfeito, qualquer que seja a ordem da matriz.

Sugestões: a) Calcule $\beta_1$ e $\beta_2$ e verifique que são menores do que $1$; b) Suponha que $\beta_{i-1} < 1$ e prove que $\beta_i < 1$.

ii) Considere $n = 3$, $b^t = (-1,\ 0,\ -0.5)$ e $[x^{(0)}]^t = (0,\ 0,\ 0)$. Qual dos métodos será mais adequado o de Jacobi ou o de Gauss-Seidel? Justifique. Faça duas iterações e calcule o erro relativo.

**6ª)** Um sistema linear é composto pela matriz dos coeficientes, $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ e pelo termo independente, $b = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

i) Faça o escalonamento da matriz $A$ utilizando o pivoteamento parcial.
ii) Construa a matriz $L$ e a matriz $U$ referentes ao escalonamento do item anterior.
iii) Qual é a matriz que é decomposta na forma $LU$?
iv) Ao resolvermos este sistema pelo processo de decomposição $LU$ qual será o termo independente considerado?

**7ª)** Considere o sistema $Ax = b$, com $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $x^t = (x_1, x_2, x_3)$ e $b^t = (3, 1.1, 0)$.

i) Escalone a matriz $A$ usando a técnica de pivoteamento parcial.

ii) Exiba os sistemas lineares inferior (matriz $L$) e superior (matriz $U$) resultantes dos processos de pivoteamento e escalonamento efetuados na matriz $A$ (não os resolva!); não se esqueça dos termos independentes.

iii) A decomposição $LU$ corresponde à qual matriz?

**8ª)** Dado o sistema $Ax = B$, com $x^t = (x_1, x_2, x_3)$ e $B^t = (7, 1, -4)$, seja $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 11/4 \\ 0 & -4 & 13/4 \end{pmatrix}$ a matriz obtida após o pivoteamento parcial que trocou a primeira linha com a terceira linha da matriz $A$. Os multiplicadores do primeiro passo são $m_{21} = -1/4$ e $m_{31} = 3/4$.

i) Escalone a matriz $A^{(1)}$ usando a técnica de pivoteamento parcial.

ii) Exiba o vetor dos termos independentes que é utilizado na decomposição LU.

iii) Obtenha a matriz $A$: use as matrizes $L$ (triangular inferior) e $U$ (triangular superior) resultantes dos processos de pivoteamento e escalonamento efetuados acima.

**9ª)** Um aluno, após efetuar algumas iterações de um método iterativo para sistemas lineares, chamou o professor e pediu para ele conferir os cálculos. O professor constatou que algumas contas estavam erradas, mas ao invés de pedir para o aluno refazê-las apenas disse para ele continuar os cálculos e prestar mais atenção, pois assim ele obteria a aproximação correta do sistema linear. Como justificar a atitude do professor? Será que contas erradas podem conduzir a resultados corretos? Use os conhecimentos de Cálculo numérico para explicar o fenômeno ocorrido.