UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
5ª Lista de Cálculo Numérico

1ª) Calcule as integrais pela regra dos Trapézios e 1/3 de Simpson usando 6 sub-intervalos:

a) $I = \int_1^4 \sqrt{x}\ dx$ b) $I = \int_0^{0,6} \frac{dx}{1+x}$

2ª) Usando as integrais do exercício anterior com quantas divisões do intervalo, no mínimo, podemos esperar obter erros menores que 10^{-5} ?

3ª) Calcule π da relação $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ com erro de 10^{-3} usando a regra 1/3 de Simpson.

4ª) Comprove gráfica e analiticamente que se:
i) f''(x) é contínua em [*a, b*] e ii) *f''(x) > 0,* $\forall\, x \in [a,b]$

então, a aproximação obtida para $\int_a^b f(x)\ dx$ pela Regra dos Trapézios é maior que o valor exato da integral. Considere n=1.

5ª) Seja f(x) = $\begin{cases} 2x+1, se\ \frac{-1}{2} \le x \le 0 \\ 1-x, se\ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

i) Obtenha o menor número de pontos para integrar f no intervalo I = [-1/2 , 1], utilizando a regra do trapézio com erro nulo. Sugestão: faça o gráfico de f.

ii)Considere pontos igualmente espaçados e dê um exemplo onde a regra dos trapézios não dá o valor exato da integral de f.

iii)A regra de Simpson é mais eficiente do que a regra dos trapézios. Note que a função f não possui derivada no ponto x = 0 e isto não interfere no resultado da integração numérica. Por exemplo, considere 2 subintervalos de I e verifique que o resultado numérico coincide com o analítico.

iv) Seja f como acima, porém, f(x) = 2*x* +1, se -1 ≤ *x* ≤ 0. No intervalo [-1, 1] os resultados da integral de Simpson ainda se manterão sempre precisos? Tente justificar este fato.

6ª) Sabe-se que $\int_{[0,1]}$ [sen(x)] dx = 0.459698, onde $\int_{[0,1]}$ [f(x)] dx representa a integral de f no intervalo fechado [0,1].
a) Mostre que o resultado numérico obtido pela regra de 1/3 de Simpson, com h = 0.5, é uma aproximação muito boa desta integral. Justifique isto pela fórmula do erro: $E_{(1/3)S} = -[h^4(b-a)f^{(iv)}(c)]/180$.

b) Por que esta mesma regra não fornece uma boa aproximação para a integral $\int_{[0.1,1]}$ [1/x] dx = ln(10), com quatro subintervalos (n = 4)? Justifique.

c) Qual o valor de n deve ser usado para se obter uma aproximação com erro menor do que 10^{-3}? E se fosse pela regra dos trapézios?

7ª) Defina a função f como segue: f(x) = x^2, se 0 ≤ x ≤ 1; f(x) = $(x+2)^3$, se 1 < x ≤ 2. Observe que f é integrável no intervalo [0,2]. Use a regra de 1/3 de Simpson, com 2 subintervalos, para integrar a função f nos intervalos [0,1] e [1,2]; use f(1) = 27, no segundo intervalo. Justifique porquê a integral numérica de f em [0,2] será exata (erro nulo).

8ª) No exercício anterior, se for utilizado f(1) = 1, em [1,2], existirá algum valor de n, número de subintervalos de [0,2], que produzirá o valor exato da integral? Justifique a resposta.